ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

e-spoudi

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α)** Σχολικό Βιβλίο Σελ. 15

β) **i)** Σχολικό Βιβλίο Σελ. 35

ii) Σχολικό Βιβλίο Σελ. 35

Α2. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 142

Α3. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 135

Α4. **α)** **Λάθος**

$$f(x)=\begin{cases}-1, x>0\\ 1, \ \ x<0\end{cases}, \ A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο A.

β) **Λάθος**

$$f(x)=\begin{cases}3x+1, & x<1\\ -x+5, & x>1\\ 3, & x=1\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=4, \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=4$, οπότε $\lim\limits_{x\to1} f(x)=4$ και $f(1)=3$

Α5. **γ)** **4**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right) = 0+\lambda = \lambda$$

Επειδή η οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ είναι η ευθεία $y=2$ είναι $\lambda = 2$

Β2. Έστω η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x) = f(x) - x = e^{-x} + 2 - x,\ x\in\mathbb{R}$$

είναι: $g'(x) = \left(e^{-x}+2-x\right)' = -e^{-x} - 1 < 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

- Η g είναι συνεχής στο [2,3], ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- $g(2) = e^{-2} > 0$

  $g(3) = e^{-3} - 1 = \dfrac{1}{e^3} - 1 < 0$

οπότε $g(2)g(3) < 0$

Άρα για την g ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο [2,3] οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(2,3)$, τέτοιο ώστε να είναι $g(\rho)=0$

Η ρίζα ρ είναι μοναδική διότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Β3. Είναι:

$$f'(x) = \left(e^{-x}+2\right)' = -e^{-x} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Δηλαδή ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1}: f(A)\to A$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ $f(A)$

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+2\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \left(e^{-x} + 2\right) = 2$$

Άρα:

$$f(A) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)\right) = (2, +\infty)$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΗΣ f^{-1}

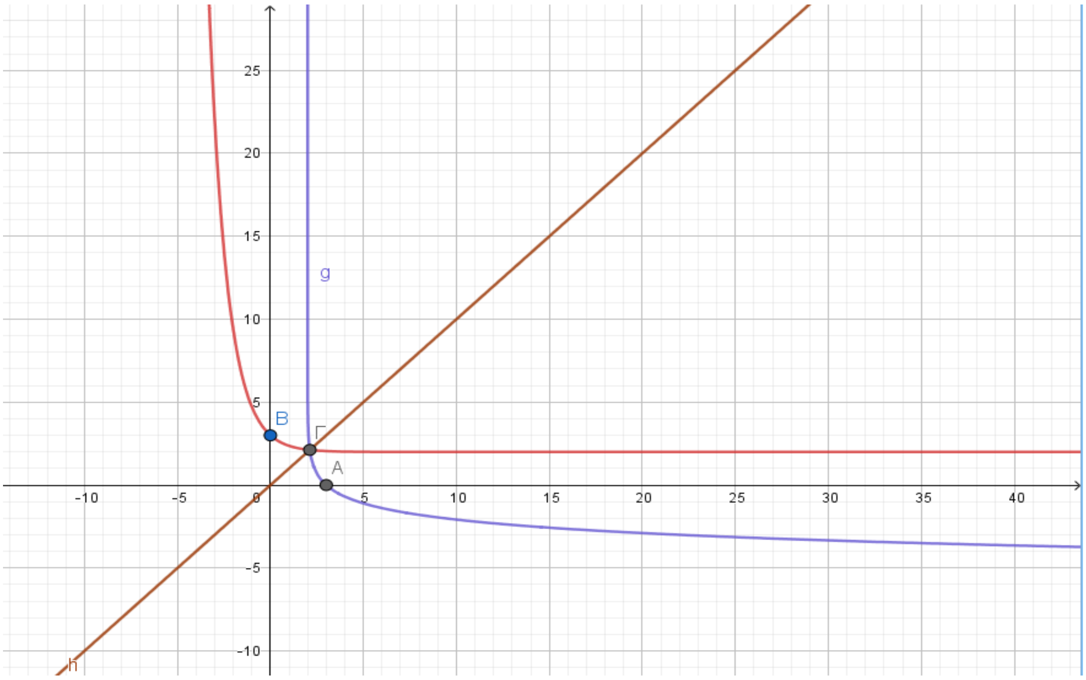
$$y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{-x} \Leftrightarrow -x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$$

Άρα $f^{-1} : (2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$

Β4. Επειδή:

$$\lim_{x \to 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(-\ln(x-2)\right) = -\lim_{x \to 2^+} \ln(x-2) = -\lim_{u \to 0^+} \ln u = +\infty$$

Η ευθεία με εξίσωση $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f^{-1}



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f πρέπει να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Είναι:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(x^2 + \alpha\right) = 1 + \alpha$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right) = 1+\beta$$

$$f(1) = 1+\alpha$$

οπότε: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1+\alpha = 1+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$

Άρα: $f(x) = \begin{cases} x^2+\alpha, & x\ge1 \\ e^{x-1}+\alpha x, & x<1 \end{cases}$

ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΟ $x_0=1$

Για τα $x>1$ είναι: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1} = x+1$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}(x+1) = 2$$

Για τα $x<1$ είναι: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1}$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1^-}\frac{\left(e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha}{1} = 1+\alpha$$

Άρα πρέπει: $2=1+\alpha \Leftrightarrow \alpha=1$, οπότε είναι και $\beta=1$ και ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x\ge1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$$

Γ2. Για τα $x>1$ είναι $f'(x) = \left(x^2+1\right)' = 2x>0$, για κάθε $x>1$

Για τα $x<1$ είναι $f'(x) = \left(e^{x-1}+x\right)' = e^{x-1}+1>0$, για κάθε $x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		

Η f είναι συνεχής στο 1 άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Γ3. i) Επειδή $0\in f(A)$ η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 και επειδή είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.
Αν υποθέσουμε ότι $x_0>0$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(x_0)>f(0)\Leftrightarrow 0>e^{-1} \text{ άτοπο}$$

Άρα $x_0<0$

ii) Είναι:

$$f^2(x)-x_0f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$$

επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(x_0,+\infty)$ η παραπάνω εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x)-x_0=0$$

Έστω η συνάρτηση h με τύπο $h(x)=f(x)-x_0, x\in(x_0,+\infty)$
Είναι $h'(x)=f'(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0,+\infty)$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα.
Το σύνολο τιμών της είναι:

$$h(A)=\left(\lim_{x\to x_0^+,} h(x),\lim_{x\to+\infty,} h(x)\right)=(-x_0,+\infty)$$

Επειδή $-x_0>0$ το $0\notin h(A)$ άρα η h δεν έχει ρίζα στο $(x_0,+\infty)$

Γ4.

Είναι:

$$y(t)=x^2(t)+1$$

$$x(t_0)=3\,,\ y(t_0)=10\,,\ x'(t_0)=2$$

$$E_{OKM}=E(t)=\frac{1}{2}(OK)(KM)=\frac{1}{2}x(t)y(t)$$

οπότε: $y'(t)=2x(t)x'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$y'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)\Leftrightarrow y'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2=12$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι $E'(t)=\frac{1}{2}x'(t)y(t)+\frac{1}{2}x(t)y'(t)$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)y(t_0)+\frac{1}{2}x(t_0)y'(t_0)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12=10+18=28$$

Άρα το εμβαδόν αυξάνεται με ρυθμό 28 τετραγωνικές μονάδες ανα δευτερόλεπτο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι:

$$f(1)=\alpha+\beta$$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{1}{x^2-2x+2}(2x-2)+\alpha$$

$$f'(1)=\alpha$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-(\alpha+\beta)=\alpha(x-1)\Leftrightarrow y=\alpha x+\beta$$

και επειδή η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι $y=-x+2$ έχουμε:

$$\alpha=-1 \text{ και } \beta=2$$

Άρα: $f(x)=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$

Δ2. Είναι:

$$E=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\right|dx$$

είναι $x-1\geq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και επειδή $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\geq 1$ για κάθε $x\in[1,2]$ είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$, οπότε:

$$E=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^2-2x+2\right)'\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(x^2-2x+2\right)\ln\left(x^2-2x+2\right)\right]_1^2-\int_1^2\left(x^2-2x+2\right)\frac{1}{x^2-2x+2}(2x-2)dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\ln 2-\int_1^2(2x-2)dx\right\}=\ln 2-\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}$$

Δ3. i) Είναι:

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1, x\in\mathbb{R}$$

$$f''(x)=\frac{2(x-1)\left(x^2-2x+4\right)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

O.E.

$y_{OE} = f'(1) = -1$

Άρα $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Η δοσμένη σχέση ισοδύναμα γράφεται:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq (\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq (\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda)-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda) \geq -\frac{1}{2} \quad (1)$$

Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right]$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right)$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda} \Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda) = \frac{1}{2}f'(\xi) \quad (2)$$

Από (1),(2) είναι:

$$\frac{1}{2}f'(\xi) \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(\xi) \geq -1$$

σχέση που ισχύει από το Δ3) i) ερώτημα.

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(x_1, f(x_1))$ είναι:

$$(\varepsilon): y = f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $B(x_2, g(x_2))$ είναι:

$$(\eta): y = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

Απαιτείται να είναι:

$$\begin{cases} f'(x_1)=g'(x_2) \\ f(x_1)-x_1f'(x_1)=g(x_2)-x_2g'(x_2) \end{cases}$$

Ισχύει $f'(x_1)\geq -1$ σύμφωνα με το Δ3) ερώτημα

Επίσης επειδή $g'(x)=-3x^2-1$ είναι $g'(x_2)=-3x_2^{\,2}-1\leq -1$

Επομένως απαιτείται να είναι:

$$f'(x_1)=g'(x_2)=-1$$

Σύμφωνα με το Δ3) υπάρχει μοναδικό x_1 με $f'(x_1)=-1$ το $x_1=1$, οπότε:

$$-3x_2^{\,2}-1=-1 \Leftrightarrow x_2=0$$

Οι παραπάνω τιμές των x_1,x_2 επαληθεύουν και τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος.

Άρα η ζητούμενη μοναδική κοινή εφαπτόμενη είναι η $y=-x+2$

Κλάδος Μαθηματικών

Σκύφας Αθανάσιος

Γιαννάκος Παναγιώτης

Ανδριώτης Δημήτρης

Σαρρή Ελένη

Σκύφα Άρτεμις

Σκύφα Αμαρυλλίς

Σαντοριναίος Αντώνης

Γρίβα Λία