ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σχετική συχνότητα

$$f_i = \frac{v_i}{v} \quad \text{και} \quad f_i\,\% = 100\, f_i$$

Ισχύουν:

- $0 \le f_i \le 1, \;\; i = 1, 2, ..., \kappa$
- $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$

Αθροιστικές συχνότητες

$N_i = v_1 + v_2 + ... + v_i, \quad v_i = N_i - N_{i-1}$ $\qquad$ $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i, \quad f_i = F_i - F_{i-1}$

Υπολογισμός του τόξου σε κυκλικό διάγραμμα

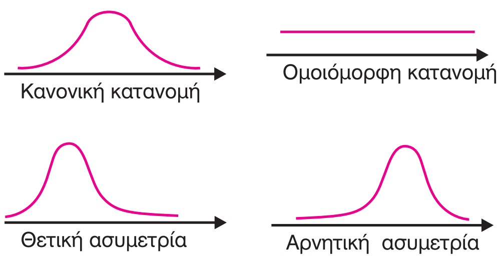
$$\alpha_i = \frac{360^\circ}{v} v_i = 360^\circ f_i$$

Υπολογισμός πλάτους κλάσεων σε ομαδοποιημένα δεδομένα

$$c = \frac{R}{\kappa},$$

όπου R: εύρος του δείγματος και κ: πλήθος κλάσεων

Καμπύλες συχνοτήτων



Μέτρα θέσης

1. Μέση τιμή (αριθμητικός μέσος)

$$\bar{x} = \frac{1}{v}\sum t_i \quad \text{(για απλές παρατηρήσεις)}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{v}\sum x_i v_i = \sum x_i f_i \quad \text{(όταν η τιμή } x_i \text{ έχει συχνότητα } v_i\text{)}$$

- Ο δεύτερος τύπος χρησιμοποιείται και στην περίπτωση που έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα και x_i, v_i είναι η κεντρική τιμή και η συχνότητα της i κλάσης αντίστοιχα.
- Αν για τη μεταβλητή y ισχύει $y = \alpha x + \beta$, τότε $\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$

2. Σταθμικός μέσος

$\bar{x} = \dfrac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$ όπου w_i ο συντελεστής βαρύτητας της τιμής x_i.

- Ο σταθμικός μέσος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής περισσότερων ομάδων δεδομένων, με διαφορετικό μέγεθος, των οποίων γνωρίζουμε τις μέσες τιμές.

3. Διάμεσος

Η διάμεσος ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά είναι:

- Η μεσαία παρατήρηση αν ν περιττός
- Ο αριθμητικός μέσος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων αν ν άρτιος

Στην περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων η διάμεσος προσδιορίζεται γραφικά ή με την βοήθεια ομοιότητας τριγώνων.

4. Επικρατούσα τιμή

Ορίζεται η παρατήρηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα.

Στην περίπτωση ομαδοποιημένων δεδομένων η επικρατούσα τιμή προσδιορίζεται γραφικά ή με τη βοήθεια ομοιότητας τριγώνων.

Μέτρα διασποράς

1. Εύρος (R)

Η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη παρατήρηση.

2. Διακύμανση (s^2)

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum (t_i - \bar{x}^2) \quad \text{(για απλές παρατηρήσεις)}$$

- Στην περίπτωση που η μέση τιμή δεν είναι ακέραιος μας διευκολύνει ο τύπος

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum t_i^2 - \frac{\left(\sum t_i\right)^2}{\nu}\right] \quad \text{ή} \quad s^2 = \frac{\sum x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2$$

- Στην περίπτωση που έχουμε συχνότητες ή ομαδοποιημένα δεδομένα χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \nu_i \quad \text{ή} \quad s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right]$$

αντίστοιχα όπου: όταν έχουμε ομαδοποιημένα δεδομένα x_i είναι τα κέντρα των κλάσεων και ν_i οι αντίστοιχες συχνότητες.

3. Τυπική απόκλιση (s)

$$s = \sqrt{s^2}$$

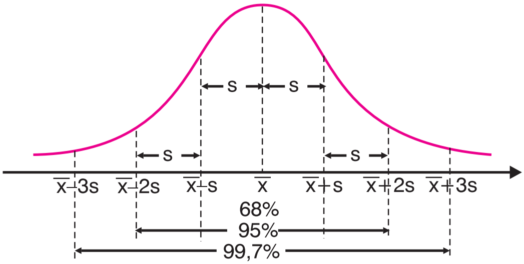
Στην περίπτωση κανονικής ή περίπου κανονικής κατανομής ισχύουν:

i) Το 68% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s,\ \bar{x} + s)$

ii) Το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s,\ \bar{x} + 2s)$

iii) Το 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s,\ \bar{x} + 3s)$

iv) Το εύρος είναι περίπου ίσο με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$



4. Συντελεστής μεταβολής (cv)

$$cv = \frac{s}{\bar{x}}\ ,\quad \bar{x} \neq 0 \qquad \text{(επί τοις εκατό)}$$

Αν cv ≤ 10% τότε το δείγμα λέγεται ομοιογενές.

➢ Αν y = α + βx τότε ισχύει:

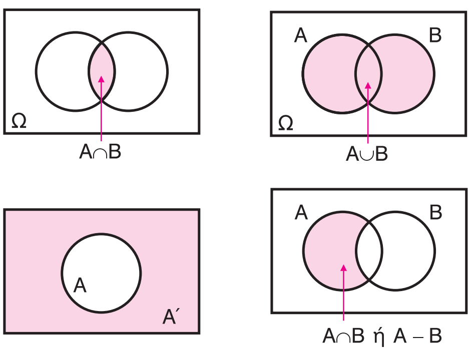
$$S_y^2 = \beta^2 S_x^2 \ \text{ και } \ S_y = |\beta| S_x$$

5. Γραμμική παλινδρόμηση

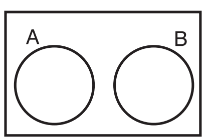
Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων: $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$, όπου $\hat{\beta} = \dfrac{\nu\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\nu\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$, $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Πράξεις με ενδεχόμενα



Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα



A∩B=∅

➤ Τα ενδεχόμενα $A \cap B'$, $A \cap B$, $A' \cap B$ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα.

Χαρακτηριστικές εκφράσεις και διατύπωση τους με σύμβολα

- "Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α,Β" $(A \cup B)'$ ή $A' \cap B'$
- "Τα Α, Β δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως" $(A \cap B)'$ ή $A' \cup B'$
- "Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α,Β"

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B) \text{ ή } (A - B) \cup (B - A)$$

- "Η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β" $A \subseteq B$

Κλασικός ορισμός της πιθανότητας

$P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$ (εφαρμόζεται όταν έχουμε ισοπιθανά απλά ενδεχόμενα)

Συνέπειες:

$$P(\Omega) = 1 \qquad P(\varnothing) = 0 \qquad 0 \le P(A) \le 1$$

Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Σε κάθε άπλο ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ του Ω αντιστοιχίζουμε τον πραγματικό αριθμό $P(\omega_i)$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_\nu) = 1$

Τον αριθμό $P(\omega_i)$ ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Ως πιθανότητα του μη κενού ενδεχομένου $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\kappa\}$ ορίζουμε

$$P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + ... + P(\alpha_\kappa).$$

Ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζουμε $P(\varnothing) = 0$

Συνέπεια: $P(\Omega) = 1$

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων

- Απλός προσθετικός νόμος

Αν τα ενδεχόμενα Α,Β είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ισχύει και για περισσότερα ενδεχόμενα αρκεί να είναι ανά δύο ασυμβίβαστα.

- $P(A') = 1 - P(A)$
- Προσθετικός νόμος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \le P(B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ΑΛΓΕΒΡΑ

Μιγαδικοί αριθμοί

- Αν $\nu = 4\rho + \upsilon$, $\upsilon = 0, 1, 2, 3$ ισχύουν:

$$i^{\nu} = \begin{cases} 1, & \text{αν } \upsilon = 0 \\ i, & \text{αν } \upsilon = 1 \\ -1, & \text{αν } \upsilon = 2 \\ -i, & \text{αν } \upsilon = 3 \end{cases}$$

- Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$ ισχύουν:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha = \gamma \quad \text{και} \quad \beta = \delta \qquad z_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{και} \quad \beta = 0$$

$$z_1 + z_2 = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i \qquad z_1 - z_2 = (\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}i$$

- Αν $z = \alpha + \beta i$ και $\bar{z} = \alpha - \beta i$ ισχύουν:

$$z + \bar{z} = 2\alpha \qquad z - \bar{z} = 2\beta i$$

- Αν $z = \alpha + \beta i$ ισχύουν:

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \qquad z \in I \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

- Αν $z = \alpha + \beta i$ ισχύουν:

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \qquad |z| = |\bar{z}| = |-z| \qquad |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

$$|z^{\nu}| = |z|^{\nu} \qquad \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1|$$

- Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει:
$|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ ανήκει σε κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_o)$ και ακτίνα ρ.

- Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z για τον οποίο ισχύει:
$|z - z_1| = |z - z_2|$ ανήκει στη μεσοκάθετη του τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$

- Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού: $z = \alpha + \beta i = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$

όπου $\rho = |z|$ και θ γωνία με $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\alpha}{\rho}$, $\eta\mu\theta = \dfrac{\beta}{\rho}$ (ένα όρισμα του z).

- Αν $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$, τότε:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \quad \text{και} \quad \theta_1 - \theta_2 = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in z$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left[\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\sigma\upsilon\nu(\theta_1 - \theta_2) + i\eta\mu(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

- Αν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ είναι μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και ν είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε:

$$z^{\nu} = \rho^{\nu}\left[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta)\right]$$

- Η εξίσωση $z^{\nu} = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ όπου ν θετικός ακέραιος και $\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ η τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού έχει ν διαφορετικές λύσεις οι οποίες δίνονται από τον τύπο:

$$z_{\kappa} = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu}\right), \quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu - 1$$

• Αν ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = \alpha + \beta i$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής του $\bar{z}_0 = \alpha - \beta i$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής.

Συναρτήσεις

• Έστω οι συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα.

Οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ έχουν πεδίο ορισμού το $A \cap B$ και η $\frac{f}{g}$ το $A \cap B$ εξαιρουμένων των τιμών του x για τις οποίες είναι $g(x) = 0$.

Οι τύποι των παραπάνω συναρτήσεων είναι:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

• Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και συμβολίζουμε με gof τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

και πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\} \neq \varnothing$

• Αν μια συνάρτηση f είναι “1-1” τότε αντιστρέφεται, στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{και} \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - \ell) = 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = \ell$
- $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Κριτήριο παρεμβολής

• Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύουν:

$h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\nu = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$

- Αν $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$

  $Q(x) = \beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + ... + \beta_1 x + \beta_0$, $\beta_\kappa \neq 0$, τότε

  $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(\alpha_\nu x^\nu)$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}$

- Αν $\alpha > 1$, τότε

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+} \log_\alpha x = -\infty$

- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+} \log_\alpha x = +\infty$

Συνέχεια συνάρτησης

- Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A και $x_0 \in A$. Αν ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ θα λέμε ότι η f είναι συνάρτηση συνεχής στο σημείο x_0.

- Θεώρημα Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν
- Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

τότε υπάρχει, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(x_0) = 0$.

- Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι $f(x_0) = n$

- Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει:

$$m \le f(x) \le M, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

- Εύρεση συνόλου τιμών συνεχώς συνάρτησης

1. Το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $A = [\alpha, \beta]$

α. Αν $f \uparrow A$ τότε $f(A) = [f(\alpha), f(\beta)]$

β. Αν $f \downarrow A$ τότε $f(A) = [f(\beta), f(\alpha)]$

2. Το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $A = (\alpha, \beta)$

α. Αν $f \uparrow A$ τότε $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$

β. Αν $f \downarrow A$ τότε $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$

Παράγωγος συνάρτησης

• Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α και $x_0 \in A$. Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

• Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι:
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

• Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Παράγωγοι συναρτήσεων

• $(c)' = 0 \qquad (x)' = 1 \qquad (x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1},\ \nu \in \mathbb{N}-\{0,1\}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x \in (0,+\infty)$

$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x \qquad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1},\quad \alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$

$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha,\quad \alpha > 0,\ x \in \mathbb{R}$

• $\left(f^{\nu}(x)\right)' = \nu f^{\nu-1}(x)\ f'(x)$

$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$

$(\eta\mu f(x))' = \sigma\upsilon\nu f(x)\ f'(x)$

$(\sigma\upsilon\nu f(x))' = -\eta\mu f(x)\ f'(x)$

$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} f'(x)$

$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

• Θεώρημα μέσης τιμής
Αν μια συνάρτηση f είναι:
➢ συνεχής στο διάστημα [α, β]
➢ παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β),
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

• Θεώρημα Rolle
Αν μια συνάρτηση f είναι:
➢ συνεχής στο διάστημα [α, β]
➢ παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β)
➢ $f(\alpha) = f(\beta)$
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να είναι

$$f'(\xi) = 0$$

- Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ισχύουν:
➢ είναι συνεχής στο Δ
➢ $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,
τότε η f είναι σταθερή στο Δ.
- Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ ισχύουν:
➢ οι f, g είναι συνεχείς στο Δ
➢ $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ,
τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να είναι

$$f(x) = g(x) + c$$

- Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
➢ Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
➢ Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.
- Θεώρημα Fermat
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε $f'(x_0) = 0$.
- Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
➢ Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
➢ Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.

✓ Ασύμμπτωτες

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$ αν και μόνον αν

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

αντιστοίχως:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$$

✓ Κανόνες de L΄ Hospital

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$

Ολοκλήρωμα

Αόριστο ολοκλήρωμα

- $\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int 0dx = c \qquad \int 1dx = x + c$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c, \quad x \neq 0$
- $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$
- $\int συνx dx = ημx + c$
- $\int ημx dx = -συνx + c$
- $\int \frac{1}{συν^2x}dx = εφx + c$
- $\int \frac{1}{ημ^2x}dx = -σφx + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$
- $\int \lambda f(x)d(x) = \lambda \int f(x)d(x)$
- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

- $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

- $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

$u = g(x) \quad και \quad du = g'(x)dx$

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$
- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x)dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

- Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$$

- Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β , γ ∈ Δ, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

- Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α ∈ Δ, τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt, \quad x \in \Delta$$

είναι μια παράγουσα της f στην Δ. Δηλαδή ισχύει

$$F'(x) = \left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

- Αν F είναι μια παράγουσα της συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [α, β] τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [\, f(x)g(x)\,]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$

Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής

- $\int_{\alpha}^{\beta} f(\, g(x)\,)g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$

όπου $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, $u_1 = g(\alpha)$ και $u_2 = g(\beta)$

Θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β], τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ∈ (α, β) τέτοιο, ώστε να είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

Εμβαδό επίπεδου χωρίου

- Έστω f μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α, β]. Το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται απο τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β είναι:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |\, f(x)\,|dx$$

- Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα [α, β]. Το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες x = α και x = β είναι:

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |\, f(x) - g(x)\,|dx$$