ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΣΠΟΥΔΗ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 194

Α2. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 188

Α3. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 259

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι:

$$|z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4)=4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$|z|^2-4z-4\bar{z}+16=4|z|^2-4z-4\bar{z}+4 \Leftrightarrow$$

$$3|z|^2=12 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$

Β2. α) Είναι:

$$|z_1|^2=4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=4 \Leftrightarrow \bar{z}_1=\frac{4}{z_1}$$

Όμοια είναι $\bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$, οπότε:

$$\bar{w} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{8}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{\frac{8}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w$$

Άρα w πραγματικός

β) Είναι:

$$|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{2z_2}{z_1}\right| = 2\frac{|z_1|}{|z_2|} + 2\frac{|z_2|}{|z_1|} = 4$$

και επειδή w είναι πραγματικός, έχουμε:

$$|w| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le w \le 4$$

B3. Αν $w = -4$ έχουμε:

$$-4 = \frac{2z_1^2 + 2z_2^2}{z_1 z_2} \Leftrightarrow 2z_1^2 + 2z_2^2 = -4z_1 z_2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$$

Επομένως:

- $|z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1-2i)| = |z_1||1-2i| = 2\sqrt{5}$
- $|z_2 - z_3| = |-z_1 - z_3| = |z_1 + z_3| = |z_1 + 2iz_1| = |z_1||1+2i| = 2\sqrt{5}$

Άρα:

$$|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$$

Επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στους πραγματικούς και γνησίως αύξουσα, οπότε το σύνολο τιμών της $f(A)$, είναι:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

Είναι:

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\frac{1}{x^2+1}\right)=0\cdot 0=0$$

Άρα $f(A)=(0,+\infty)$

Γ2. Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right)=f(2)\underset{1-1}{\overset{f}{\Leftrightarrow}}$$

$$e^{3-x}\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow e^3\frac{x^2+1}{e^x}=2\Leftrightarrow e^3\frac{1}{f(x)}=2\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{e^3}$$

Επειδή $\frac{2}{e^3}\in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στους πραγματικούς, υπάρχει μοναδικό x_o στους πραγματικούς τέτοιος ώστε να είναι:

$$f(x_o)=\frac{2}{e^3}$$

που είναι το ζητούμενο.

Γ3. Είναι:

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt = \int_{2x}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{4x} f(t)dt = \int_{c}^{4x} f(t)dt - \int_{c}^{2x} f(t)dt$$

Έστω η συνάρτηση φ με τύπο:

$$\varphi(x) = \int_{c}^{x} f(t)dt \ , \ x > 0$$

Ζητάμε να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$\varphi(4x) - \varphi(2x) < 2xf(4x) \qquad (1)$$

Για την φ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $\left[2x, 4x\right]$, $x > 0$, οπότε

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2x, 4x)$, τέτοιο ώστε να είναι:

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(4x) - \varphi(2x)}{4x - 2x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\varphi(4x) - \varphi(2x)}{2x} \Leftrightarrow$$

$$\varphi(4x) - \varphi(2x) = 2xf(\xi) \qquad (2)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στους πραγματικούς έχουμε:

$$2x < \xi < 4x \Leftrightarrow f(2x) < f(\xi) < f(4x) \Leftrightarrow$$

$$2xf(2x) < 2xf(\xi) < 2xf(4x) \qquad (3)$$

Από τις (1), (2), (3) προκύπτει το ζητούμενο.

Γ4. Μελέτη της συνέχειας της g στο $x_o = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{4f(4x) - 2f(2x)}{1} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 2 = g(0)$$

Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)dt + \frac{1}{x}\left(4f(4x) - 2f(2x)\right)$$

Σύμφωνα με το Γ3 ερώτημα έχουμε:

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)dt > -\frac{2}{x}f(4x) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)dt + \frac{1}{x}\left(4f(4x) - 2f(2x)\right) > -\frac{2}{x}f(4x) + \frac{1}{x}\left(4f(4x) - 2f(2x)\right) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) > -\frac{2}{x}f(4x) + \frac{4}{x}f(4x) - \frac{2}{x}f(2x) \Leftrightarrow g'(x) > \frac{2}{x}\left(f(4x) - f(2x)\right) > 0$$

διότι $x > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στους πραγματικούς.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει:

$$f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$$

οπότε:

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$$

Για $x=0$ προκύπτει $c=0$, οπότε:

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Leftrightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2-1=2xe^{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1 \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)}-x\right|=\sqrt{x^2+1}$$

Έστω η συνάρτηση g με:

$$g(x)=e^{f(x)}-x$$

η οποία είναι συνεχής και δεν έχει ρίζα, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $g(0)=1>0$ είναι $g(x)>0$, για όλους τους πραγματικούς , επομένως:

$$e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Δ2. α) Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{και} \quad f''(x)=-\frac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	$+$ 0 $-$
$f(x)$	$\smile$ Σ.Κ. $\frown$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty,0]$, τα κοίλα κάτω στο $[0,+\infty)$ και

$$y_{\Sigma K} = f(0) = 0$$

β) Η ευθεία $y = x$ είναι εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 0$, και επειδή η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ η $y = x$ βρίσκεται πάνω από την C_f στο $(0,+\infty)$, οπότε:

$$E = \int_0^1 (x - f(x))dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (x)'f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2} - [xf(x)]_0^1 + \int_0^1 xf'(x)dx = \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 =$$

$$= -\frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$$

Δ3. $$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)\ln|f(x)|\right] \underset{x>0}{\overset{f(x)>0}{=}} \lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1}{f^2(x)}\right)\cdot f^2(x)\cdot \ln f(x)\right] \qquad (1)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)'}{(f^2(x))'} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{2f(x)f'(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f(x)}{2f'(x)} = \frac{e^0\cdot 0}{2\cdot 1} = 0 \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f^2(x)\ln f(x) \underset{u\to 0^+}{\overset{u=f(x)}{=}} \lim_{u\to 0^+} u^2\ln u = \lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u^2}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{u\to 0^+}\frac{(\ln u)'}{\left(\frac{1}{u^2}\right)'} =$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{2u}{u^4}} = \lim_{u\to 0^+}\left(-\frac{u^2}{2}\right) = 0 \qquad (3)$$

Από τις (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)\ln|f(x)|\right] = 0$

Δ4. Έστω η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x)=(x-2)\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)dt\right),x\in[2,3]$$

Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

$$g(2)=-\left(8-3\int_0^2 f^2(t)dt\right)=-8+3\int_0^2 f^2(t)dt$$

$$g(3)=1-3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt$$

Επειδή $f(x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$, έχουμε:

$$f^2(t)\le t^2 \quad \text{οπότε} \quad \int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

Άρα:

$$3\int_0^2 f^2(t)dt-8<0\Leftrightarrow g(2)<0$$

Επίσης $f(x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$, επομένως:

$$f\left(t^2\right)\le t^2 \quad \text{οπότε} \quad \int_0^1 f^2\left(t^2\right)dt<\int_0^1 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

Άρα:

$$3\int_0^1 f\left(t^2\right)dt<1\Leftrightarrow g(3)>0$$

Οπότε $g(2)g(3)<0$ και σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano για την g υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε να είναι $g(x_0)=0$

Κλάδος Μαθηματικών
Σκύφας Αθανάσιος
Γιαννάκος Παναγιώτης
Ανδριώτης Δημήτρης
Σαρρή Ελένη
Παύλου Φώτης
Τάτσης Πέτρος
Κουκόσιας Δημήτρης
Σταθοπούλου Ιωάννα
Βασιλακόπουλος Πραξιτέλης
Σκύφα Άρτεμις
Αναστασίου Στάθης
Μπαλαδήμα Βάνα