ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

Απαντήσεις στο Διαγώνισμα Μαθηματικών Γενικής Παιδείας 15-3-2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 151 σχολικού
Α2. Σελίδα 93 σχολικού
Α3. Σελίδα 14 σχολικού
Α4. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Λάθος **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε:

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2+0,29=2\cdot 0,2f_1+2\cdot 0,4f_2+2\cdot 0,3f_3 \Leftrightarrow$$

$$f_1^2-2\cdot 0,2f_1+0,04+f_2^2+2\cdot 0,4f_2+0,16+f_3^2+2\cdot 0,3f_3+0,09=0 \Leftrightarrow$$

$$(f_1-0,2)^2+(f_2-0,4)^2+(f_3-0,3)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$f_1=0,2 \quad \text{και} \quad f_2=0,4 \quad \text{και} \quad f_3=0,3$$

Β2.

Ύψη Μαθητών	κ.τ. x_i	f_i	$x_i f_i$
[164 , 170)	167	0,2	33,4
[170 , 176)	173	0,4	69,2
[176 , 182)	179	0,3	53,7
[182 , 188)	185	0,1	18,5
	Σύνολο	1	174,8

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{4}x_i f_i=174,8$$

Β3.

Ύψη Μαθητών	κ.τ. x_i	f_i	v_i
[164 , 170)	167	0,2	10
[170 , 176)	173	0,4	20
[176 , 182)	179	0,3	15
[182 , 188)	185	0,1	5
	Σύνολο	1	50

Έστω λ το ζητούμενο πλήθος των μαθητών. Τότε: $\lambda=v_3'+v_4$

Όπου [180 , 182) εκατοστά είναι το ύψος των v_3'

όταν [176 , 182) εκατοστά είναι το ύψος των $v_3=15$ μαθητών

Επειδή οι παρατηρήσεις κατανέμονται ομοιόμορφα στις κλάσεις προκύπτει η αναλογία:

$$\frac{2}{6}=\frac{v_3'}{15} \Leftrightarrow v_3'=5 \text{ μαθητές.}$$

Επομένως το ζητούμενο πλήθος μαθητών είναι: $\lambda=5+5=10$

Β4. Από το ερώτημα Β2 έχουμε:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 174,8\cdot 50=\sum_{i=1}^{4}x_i v_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4}x_i v_i=8.740$$

Η μέση τιμή $\bar{x}'$ που προκύπτει μετά την αποχώρηση των δύο μαθητών είναι:

$$\overline{x}' = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i - 2\cdot 167}{48} \Leftrightarrow \overline{x}' = \frac{8.740-334}{48} \Leftrightarrow \overline{x}' = 175{,}125$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

$$P(0)+P(1)+P(2)+P(\omega_1)+P(\omega_2)=1 \Leftrightarrow P(0)+P(1)+P(2)+\frac{1}{2}=1$$

$$P(0)+\frac{1}{2}P(0)+2P(0)+\frac{1}{2}=1 \Leftrightarrow P(0)=\frac{1}{7}$$

Επομένως:

$$P(1)=\frac{1}{2}P(0)=\frac{1}{14} \qquad P(2)=2P(0)=\frac{2}{7}$$

$$P(\omega_1)=P(0)=\frac{1}{7} \qquad P(\omega_2)=\frac{1}{2}-P(\omega_1)=\frac{5}{14}$$

Γ2. Έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{\alpha}{3}x^3-4x^2+15x-1\right)'$$

$$f'(x)=\alpha x^2-8x+15$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=8x$, επομένως:

$$f'(1)=8 \Leftrightarrow \alpha\cdot 1^2-8\cdot 1+15=8 \Leftrightarrow \alpha=1$$

Άρα:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+15x-1 \quad \text{και} \quad f'(x)=x^2-8x+15$$

Έχουμε:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=5$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της f' καθώς και η μονοτονία της f.

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			τ.μ.		τ.ελ.		

Η f παρουσιάζει για $x=3$ τοπικό μέγιστο και για $x=5$ τοπικό ελάχιστο. Άρα $\omega_1=3$ και $\omega_2=5$

Γ3. i. Είναι:

$$f''(x)=\left(x^2-8x+15\right)'=2x-8$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f''(x)+4}{\sqrt{3x-2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{\sqrt{3x-2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{\sqrt{3x-2}^{\,2}-2^2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}{3\cancel{(x-2)}}=\frac{8}{3}$$

Επομένως:

$$\lambda^2 - 5\lambda + \frac{26}{3} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = 3$$

Άρα:

$$B = \{2,3\} \text{ και } P(B) = P(2) + P(3) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

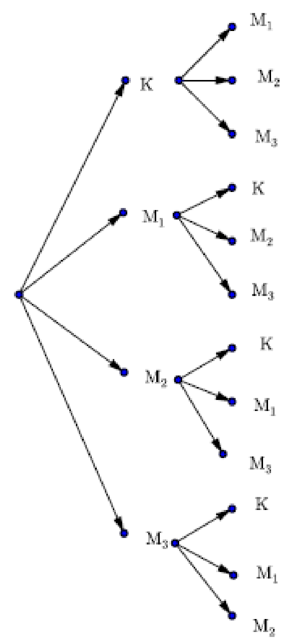
ii. Είναι:

$\Gamma = A \cap B = \{3\}$, άρα $P(\Gamma) = P(A \cap B) = P(3) = \frac{1}{7}$ και

$\Delta = A \cup B = \{2,3,5\}$, άρα $P(\Delta) = P(A \cup B) = P(2) + P(3) + P(5) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{5}{14} = \frac{11}{14}$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. α)



$$\Omega = \{KM_1, KM_2, KM_3, M_1K, M_1M_2, M_1M_3, M_2K, M_2M_1, M_2M_3, M_3K, M_3M_1, M_3M_2\}$$

β) $A = \{M_1M_2, M_1M_3, M_2M_1, M_2M_3, M_3M_1, M_3M_2\}$ και $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

Δ2. α) Είναι:

$$f'(x) = \left(x^3 + 3N(A)x^2 + N(A)\cdot N(\Omega)x + 8\right)'$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6N(A)x + N(A)\cdot N(\Omega)$$

Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα, επομένως ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα για την διακρίνουσα του τριωνύμου $3x^2 + 6N(A)x + N(A)\cdot N(\Omega)$ ισχύει:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 36\left(N(A)\right)^2 - 12N(A)\cdot N(\Omega) \leq 0 \Leftrightarrow 36\left(N(A)\right)^2 \leq 12N(A)\cdot N(\Omega) \Leftrightarrow$$

$$\frac{36\left(N(A)\right)^2}{12N(A)\cdot N(\Omega)} \leq \frac{12N(A)\cdot N(\Omega)}{12N(A)\cdot N(\Omega)} \Leftrightarrow 3P(A) \leq 1 \Leftrightarrow P(A) \leq \frac{1}{3}$$

όμως είναι $P(A) \geq \frac{1}{3}$, οπότε $P(A) = \frac{1}{3}$

β) Έχουμε:

$$P(A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow N(\Omega) = 3N(A) \quad (1)$$

Η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-1,1)$, άρα:

$$f(-1) = 1 \Leftrightarrow (-1)^3 + 3N(A) + N(A) \cdot N(\Omega)(-1) + 8 = 1 \Leftrightarrow -1 + 3N(A) - N(A) \cdot N(\Omega) + 8 = 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$-3(N(A))^2 + 3N(A) + 6 = 0 \Leftrightarrow -(N(A))^2 + N(A) + 2 = 0 \Leftrightarrow N(A) = 2 \text{ ή } N(A) = -1 \text{ (απορ)}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $N(\Omega) = 3N(A) = 3 \cdot 2 = 6$