ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΣΠΟΥΔΗ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σελίδα σχολικού βιβλίου 251

Α2. Θεωρία. Σελίδα σχολικού βιβλίου 273

Α3. Θεωρία. Σελίδα σχολικού βιβλίου 150

Α4. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έστω $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, τότε

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - zi = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + y^2 - 2) + (x - 1)i = 0$$

οπότε:

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

άρα:

$$z_1 = 1+i$$
$$z_2 = 1-i$$

B2. $$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39} = 3\left[\frac{i(1-i)}{1-i}\right]^{39} =$$

$$= 3i^{39} = 3i^{3} = -3i$$

B3. $$|u+w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i| = 5$$

Άρα ο Γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 5$ δηλαδή:

$$\mathbb{C}: x^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{e^x+1}e^x = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$h''(x) = \left(\frac{1}{e^x+1}\right)' = -\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$

Γ2. Είναι:

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < 1 - \ln(e+1) \Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x)) < h(1) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$h'(x) < h'(0) \overset{h'\downarrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

Γ3. Οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Είναι:

$$h(x)=\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$$

οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Άρα:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right)=0$$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Είναι:

$$\frac{h(x)}{x}=1-\frac{1}{x}\ln\left(e^x+1\right)$$

Επειδή $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1$ είναι $\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=1$, άρα $\lambda=1$

$$h(x)-\lambda x=-\ln\left(e^x+1\right)$$

Επειδή $\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1$ είναι $\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)-\lambda x\right)=0$, άρα $\beta=0$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Γ4. Παρατηρούμε ότι $h(0)=-\ln 2$, οπότε $\varphi(0)=0$ και η ρίζα αυτή είναι μοναδική, διότι η $\pi(x)=h(x)+\ln 2$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$x>0\Leftrightarrow \pi(x)>\pi(0)\Leftrightarrow \pi(x)>0$$

Άρα είναι $\varphi(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, οπότε:

$$E=\int_0^1|\varphi(x)|dx=\int_0^1 e^x\left(h(x)+\ln 2\right)dx=$$

$$=\left[e^x\left(h(x)+\ln 2\right)\right]_0^1-\int_0^1 e^x\left(h(x)+\ln 2\right)'dx=$$

$$=e\left(1-\ln(e+1)+\ln 2\right)-\int_0^1 e^x\frac{1}{e^x+1}dx=$$

$$=e-e\ln(e+1)+e\ln 2-\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=$$

$$=e-e\ln(e+1)+e\ln 2-\ln(e+1)+\ln 2=$$

$$=e-(e+1)\ln(e+1)+(e+1)\ln 2=$$

$$=e+(e+1)\left[\ln 2-\ln(e+1)\right]=$$

$$=e+(e+1)\cdot\ln\frac{2}{e+1}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1\right)'}{(x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^x = 1 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Για τα $x \neq 0$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \frac{xe^x - \left(e^x - 1\right)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

Έστω η συνάρτηση h με $h(x) = xe^x - e^x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

Είναι $h'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x,\ x \in \mathbb{R}$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με $y_{OE} = 0$

Άρα είναι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, οπότε είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ2. α) Για τα $x \neq 0$ είναι:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1 - x\right)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα $f'(0) = \frac{1}{2}$

Έστω η συνάρτηση F με $F(x)=\int_{1}^{2f'(x)} f(u)du,\ x\in\mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $F(0)=0$. Επίσης:

$$x>0 \Leftrightarrow e^{x}>e^{0} \Leftrightarrow e^{x}-1>0$$
$$x<0 \Leftrightarrow e^{x}<e^{0} \Leftrightarrow e^{x}-1<0$$

Άρα είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η μοναδική περίπτωση να είναι $F(x)=0$ είναι:

$$2f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x)=f'(0)$$

επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα η μοναδική ρίζα είναι $x=0$

β) Στο σημείο στο οποίο ο Ρυθμός Μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ είναι διπλάσιος από το Ρυθμό Μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$, ισχύει:

$$x'(t)=\left[2f(x(t))\right]' \Leftrightarrow$$
$$x'(t)=2f'(x(t))\cdot x'(t) \overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow}$$
$$f'(x(t))=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$f'(x(t))=f'(0) \Leftrightarrow x(t)=0$$

διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι και "1-1"

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0,1)$

Δ3. Είναι:

$$g(x)=\left(x\frac{e^{x}-1}{x}+1-e\right)^{2}(x-2)^{2}=\left(e^{x}-e\right)^{2}(x-2)^{2},\ x>0$$
$$g'(x)=2\left(e^{x}-e\right)e^{x}(x-2)^{2}+\left(e^{x}-e^{2}\right)2(x-2)=$$
$$=2\left(e^{x}-e\right)(x-2)\left[e^{x}(x-2)+e^{x}-e\right]=$$
$$=2\left(e^{x}-e\right)(x-2)\left(xe^{x}-2e^{x}+e^{x}-e\right)=$$
$$=2\left(e^{x}-e\right)(x-2)\left(xe^{x}-e^{x}-e\right)$$

Είναι:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } xe^{x}-e^{x}-e=0$$

Έστω η συνάρτηση H με $H(x)=xe^{x}-e^{x}-e,\ x\in(0,+\infty)$

Σύμφωνα με το Θ. Bolzano στο $[1,2]$ η H έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ στο $(1,2)$ και επειδή $H'(x)=xe^{x}>0$ για κάθε $x>0$ η ρίζα ρ είναι μοναδική αφού η H είναι γνησίως αύξουσα.

x	0		1		ρ		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			Τ.Ε		Τ.Μ		Τ.Ε		

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει το ζητούμενο.

Κλάδος Μαθηματικών

Σκύφας Αθανάσιος
Γιαννάκος Παναγιώτης
Ανδριώτης Δημήτρης
Σαρρή Ελένη
Παύλου Φώτης
Τάτσης Πέτρος
Κουκόσιας Δημήτρης
Σταθοπούλου Ιωάννα
Βασιλακόπουλος Πραξιτέλης
Σκύφα Άρτεμις
Αναστασίου Στάθης
Μπαλαδήμα Βάνα

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

Σ

ΣΠΟΥΔΗ

- **ΑΘΗΝΑ: ΣΟΛΩΝΟΣ 101 ΤΗΛ. 2103828854 – 2103845239**
- **ΠΑΓΚΡΑΤΙ: ΑΓ. ΦΑΝΟΥΡΙΟΥ 30 ΤΗΛ. 2107520883 – 2107519429**
- **ΒΥΡΩΝΑΣ: ΝΙΚΗΦΟΡΙΔΗ 10 ΤΗΛ. 2107669192 – 2107666233**
- **ΠΕΙΡΑΙΑΣ: ΗΡ.ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 30 ΤΗΛ. 2107520883 – 2107519429**

www.spoudi.gr, e-mail: info@ spoudi.gr /spoudibyronas@gmail.com