ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΤΜΗΜΑΤΑ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΑΠΟΦΟΙΤΟΙ

16 / 3 / 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Α2. Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
<<Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ>>

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής. **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

β) Το αντίστροφο του παραπάνω ισχυρισμού ισχύει; Να δώσετε παράδειγμα που να τεκμηριώνει την απάντησή σας.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1 – 1.

β. Αν το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $\alpha\cdot\beta\neq 0$, τότε σε κάθε περίπτωση το σημείο $M'\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} της f.

γ. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις δεν έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.

δ. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α,β] ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx+\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx=0$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση f, με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}-2e^{x-1}-x-1, & x\le 1\\ \ln x-4, & x>1\end{cases}$$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

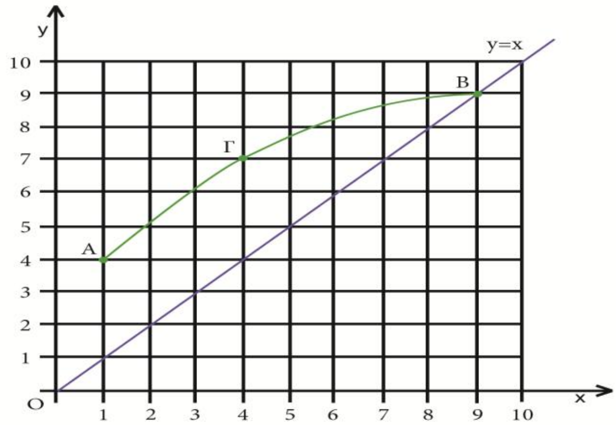
Β2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών τής f **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Β3. Αν $\alpha\neq 1$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\dfrac{f(\alpha)+4}{x-1}+\dfrac{2017}{x-3}=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,3)$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Β4. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f στο $-\infty$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Γ



Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας παραγωγίσιμης και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f και της αντίστροφής της f^{-1}. Να κάνετε τη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της f^{-1} **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

Γ2. Αν $g(x)=x^2+5,\ x\in\mathbb{R}$, τότε να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης fog.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Γ3. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και $f'(4)=\frac{1}{3}$, τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της Γ', το οποίο είναι συμμετρικό του Γ ως προς την ευθεία $y=x$. **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

Γ4. Να βρείτε τον τύπο της απόστασης d(x) του σημείου $\Delta(6,0)$ από το σημείο $M(x,f(x))$ της C_f για κάθε $x\in D_f$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση d είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία M_1, M_2 της C_f τα οποία απέχουν αντίστοιχα από το Δ λιγότερο και περισσότερο από ό,τι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της C_f. **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

Γ5. Σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης ΑΒ από το Α προς το Β και έστω M' η προβολή του στον άξονα $x'x$. Ένας παρατηρητής Π βρίσκεται στην θέση Π(10,0) και παρατηρεί την κίνηση του Μ. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης και της τεταγμένης του Μ είναι αντίστοιχα $2\frac{m}{s}$ και $1\frac{m}{s}$, τότε να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $MM'\Pi$ τη χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το σημείο Γ. **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

ΣΠΟΥΔΗ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{|\sigma\upsilon\nu x|}$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x)\geq g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g(0)=1$ και $g(\pi)=-1$
- Η g'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε να είναι $f'(\xi)=0$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_g της g στο $x_0=0$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$2g'(\xi_1)+(\pi-2)g'(\xi_2)=-2$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ4. Ν αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\int_0^{\pi}\eta\mu x\, g''(x)\,dx=-\int_0^{\pi}\eta\mu x\, g(x)\,dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΤΜΗΜΑΤΑ: Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΑΠΟΦΟΙΤΟΙ

23 / 3 / 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Α2. Έστω δύο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και fog.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Α4. Αν η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να γράψετε τους τύπους από τους οποίους υπολογίζοντας οι πραγματικοί αριθμοί λ και β

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Α5. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Ένα τοπικό μέγιστο είναι πάντοτε μεγαλύτερο από ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f.

β) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ. Αν $f'(x_0)=0$, τότε σε κάθε περίπτωση η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν έχει ρίζα, τότε σε κάθε περίπτωση δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα y′y

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β], τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dt = f(x)(\beta-\alpha)$$

ΣΠΟΥΔΗ

ε) Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο. **ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{e^{x^2}}{x^2}-3,\ x>0$ και F είναι μια παράγουσα της f με $8F(2)-F(1)=\frac{7}{4}$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Β3. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Β4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_1^2 3x^2 F(x)\,dx$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $x^2f^2(x)-4x\etaμx f(x)=x^4-4\etaμ^2x$
- $f(\pi)=\pi$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x+2\frac{\etaμx}{x}, & x>0 \\ 2, & x=0 \end{cases}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x)\le x+2$, για κάθε $x\ge 0$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)=4x+1$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[0,4]$, τέτοιο ώστε να ισχύει:

ΣΠΟΥΔΗ

$$2f(2)+4f(4)=7f(x_0)-2$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΘΕΜΑ Δ

Οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες, με συνεχή παράγωγο και ισχύουν:

- $\left(f(x)-g(x)+x\right)\left(f'(x)-g'(x)+1\right)=0$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $\mathbf{R}$
- $f(1)=g(1)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$f(x)-g(x)=1-x$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $\mathbf{R}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των f,g αντίστοιχα και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left|x^{2020}+f(x)-g(x)-2x\right|-\left|x-x^{2020}+1\right|}{x^2-x}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h με τύπο:

$$h(x)=f(x)-g(x)+3x^2-4,\ x\in\mathbf{R}$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 το διάστημα (1,2) και κατόπιν να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\frac{1}{h'(\xi_1)}+\frac{7}{h'(\xi_2)}=1$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

ΣΠΟΥΔΗ