ΣΠΟΥΔΗ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

# ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015
# ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
# (ΟΜΑΔΑ Β΄)

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** ΘΕΩΡΙΑ (Σχολικό βιβλίο σελ. **31**)

**Α2.** ΘΕΩΡΙΑ (Σχολικό βιβλίο σελ. **22**)

**Α3.** ΘΕΩΡΙΑ (Σχολικό βιβλίο σελ. **87**)

**Α4.** α) **Λ** β) **Σ** γ) **Λ** δ) **Λ** ε) **Σ**

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Είναι:

$$(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$3x-1=0 \text{ ή } 8x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{1}{3} \text{ ή } x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=\frac{1}{4}$$

Επίσης:

$$9x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3} \text{ ή } x=-\frac{1}{3}$$

οπότε:

$$P(\Gamma)=\frac{2}{3}, \text{ διότι } 0 \le P(\Gamma) \le 1$$

Επειδή ισχύει:

$$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$

Έχουμε:

$$P(A \cap B) \le P(A) \le P(A \cup B)$$

Άρα είναι:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{1}{3} \text{ και } P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

**B2.** Είναι:

$$A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B - A$$

οπότε:

$$P(A' - B') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \qquad (1)$$

Είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12} \qquad (2)$$

Από τη σχέση (1) βάσει της (2) έχουμε:

$$P(A' - B') = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Το ενδεχόμενο Δ είναι το $\Delta = (A \cap B)'$ , οπότε:

$$P(\Delta) = P\left((A \cap B)'\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

**B3.** Το ενδεχόμενο Ε είναι το $E = (A - B) \cup (B - A)$ , οπότε:

$$P(E) = P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) =$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B - A) =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

**B4.** Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα, τότε θα ισχύει:

$$P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{13}{12}>1 \text{ άτοπο}$$

Άρα τα ενδεχόμενα Β και Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Είναι:

$$f_1\%=10,\ f_5\%=30,$$

$$\alpha_3=360^{o}\cdot f_3 \Leftrightarrow 108^{o}=360^{o}\cdot f_3 \Leftrightarrow f_3=0,3 \Leftrightarrow f_3\%=30$$

Έχουμε:

$$f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%+f_5\%=100$$

$$10+f_2\%+30+f_4\%+30=100$$

$$f_2\%+f_4\%=30$$

Άρα:

$$f_2+f_4=0,3 \qquad (1)$$

Επίσης:

$$\overline{x}=\sum_{i=1}^{5}x_if_i \Leftrightarrow 14=9\cdot 0,1+11\cdot f_2+13\cdot 0,3+15\cdot f_4+17\cdot 0,3 \Leftrightarrow$$

$$14=9,9+11\cdot f_2+15\cdot f_4 \Leftrightarrow 11f_2+15f_4=4,1 \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$f_2=0,1 \text{ και } f_4=0,2$$

**Γ2.** Έχουμε:

$$s^2=\frac{1}{v}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2\cdot v_i=\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2\cdot\frac{v_i}{v}=\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2\cdot f_i=$$

$$(9-14)^2\cdot 0,1+(11-14)^2\cdot 0,1+(3-14)^2\cdot 0,3+$$

$$+(15-14)^2\cdot 0,2+(17-14)^2\cdot 0,3=6,6$$

Επομένως:

$$s=\sqrt{6,6}\approx 2,57$$

Άρα $CV=\frac{s}{\overline{x}}=\frac{2,57}{14}>10\%$ , δηλαδή το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

**Γ3.** Είναι:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i v_i + x_5\cdot v_5}{v} \Leftrightarrow \bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i v_i}{v}+x_5\cdot f_5 \Leftrightarrow 14=\frac{1780}{v}+17\cdot 0{,}3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14v=1780+5{,}1v \Leftrightarrow 8{,}9v=1780 \Leftrightarrow v=200$$

**Γ4.** Έχουμε:

$$\beta_i=\frac{1}{s_\alpha}\alpha_i-\frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha},\ i=1,2,3,4,5$$

Από την εφαρμογή σελ.99 σχολικού προκύπτει:

$$\bar{\beta}=\frac{1}{s_\alpha}\bar{\alpha}-\frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}=0 \quad \text{και} \quad s_\beta=\frac{1}{s_\alpha}s_\alpha=1$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$B\Delta^2=A\Delta^2+AB^2 \Leftrightarrow 10^2=A\Delta^2+x^2 \Leftrightarrow$$

$$A\Delta^2=100-x^2 \Leftrightarrow A\Delta=\sqrt{100-x^2}$$

Επομένως:

$$f(x)=E(x)=AB\cdot A\Delta=x\sqrt{100-x^2},\ 0<x<10$$

**Δ2.** Είναι:

$$f'(x)=\left(x\sqrt{100-x^2}\right)'=(x)'\sqrt{100-x^2}+x\left(\sqrt{100-x^2}\right)'=$$

$$=\sqrt{100-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=\sqrt{100-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}=$$

$$=\frac{100-x^2-x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{-2x^2+100}{\sqrt{100-x^2}}=$$

$$=\frac{-2\left(x^2-50\right)}{\sqrt{100-x^2}},\ 0<x<10$$

Επίσης:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-2\left(x^2-50\right)}{\sqrt{100-x^2}}=0 \Leftrightarrow x^2=50 \Leftrightarrow x=-\sqrt{50}\ \text{απορρίπτεται ή}\ \ x=\sqrt{50}$$

| x | 0 | | $\sqrt{50}$ | | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | | ↘ | |

Ο.Μ

Άρα το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $x=\sqrt{50}$ , οπότε είναι $AB=\sqrt{50}$ και $A\Delta=\sqrt{100-\left(\sqrt{50}\right)^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}$ , άρα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

**Δ3. Α΄ ΤΡΟΠΟΣ**

Είναι:

$$f(1+x)=(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}=(1+x)\sqrt{100-\left(1+2x+x^2\right)^2}=$$
$$=(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}$$

οπότε:

$$\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98\cdot x}=\frac{(1+x)\sqrt{99-2x-x^2}-\sqrt{99}}{98x}=$$

$$=\frac{(1+x)^2\left(99-2x-x^2\right)-99}{98x(1+x)\left(\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right)}=$$

$$=\frac{\left(1+2x+x^2\right)\left(99-2x-x^2\right)-99}{98x(1+x)\left(\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{99}-2x-x^2+2\cdot 99x-4x^2-\cancel{2x^3}+99x^2-\cancel{2x^3}-x^4-\cancel{99}}{98x(1+x)\left(\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right)}=$$

$$=\frac{-x^4+94x^2-2x+198x}{98x(1+x)\left(\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right)}=$$

$$=\frac{x\left(-x^3+94x-2+198\right)}{98x(1+x)\left(\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right)}=$$

$$=\frac{-x^3+94x-2+198}{98(1+x)\left(\sqrt{99-2x-x^2}+\sqrt{99}\right)}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\frac{196}{98\left(\sqrt{99}+\sqrt{99}\right)}=\frac{2}{2\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$

## Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

Γνωρίζουμε ότι:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

οπότε:

$$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{x} \qquad (1)$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\frac{1}{98}\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{x}\overset{(1)}{=}\frac{1}{98}f'(1)=$$

$$=\frac{1}{98}\cdot\frac{98}{\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$

**Δ4.** Ισχύουν:

$A-B\subseteq A$ και $P(A-B)\le P(A)$ με $0<P(A-B)\le 1$ και $0<P(A)\le 1$

οπότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\sqrt{50}\right]$ είναι:

$$f\left(P(A-B)\right)\le f\left(P(A)\right)\Leftrightarrow$$

$$P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)}\le P(A)\sqrt{100-P^2(A)}\Leftrightarrow$$

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}} \qquad (1)$$

Επειδή:

$$0<P(A)\le 1\Leftrightarrow 0<P^2(A)\le 1\Leftrightarrow$$

$$0>-P^2(A)\ge -1\Leftrightarrow 99\le 100-P^2(A)<100\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{99} \le \sqrt{100 - P^2(A)} < \sqrt{100} \Leftrightarrow \frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}$$

και $0 < P(A - B) \le 1$, έχουμε:

$$0 < \frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}$$

Όμοια είναι:

$$0 < \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}} \le \frac{1}{\sqrt{99}}$$

από τη μονοτονία της f και τη σχέση (1) προκύπτει το ζητούμενο.

## Κλάδος Μαθηματικών


**Σκύφας Αθανάσιος**
**Γιαννάκος Παναγιώτης**
**Ανδριώτης Δημήτρης**
**Σαρρή Ελένη**
**Παύλου Φώτης**
**Τάτσης Πέτρος**
**Κουκόσιας Δημήτρης**
**Σταθοπούλου Ιωάννα**
**Βασιλακόπουλος Πραξιτέλης**
**Μπαλαδήμα Βάνα**
**Αναστασίου Στάθης**
**Σκύφα Άρτεμις**
**Αμαξόπουλος Πάρης**



**ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ**

**ΣΠΟΥΔΗ**

- **ΑΘΗΝΑ: ΣΟΛΩΝΟΣ 101 ΤΗΛ. 2103828854 – 2103845239**
- **ΠΑΓΚΡΑΤΙ: ΑΓ. ΦΑΝΟΥΡΙΟΥ 30 ΤΗΛ. 2107520883 – 2107519429**
- **ΒΥΡΩΝΑΣ: ΝΙΚΗΦΟΡΙΔΗ 10 ΤΗΛ. 2107669192 – 2107666233**
- **ΠΕΙΡΑΙΑΣ: ΗΡ.ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 30 ΤΗΛ. 2107520883 – 2107519429**
- **ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΖΗΡΙΔΗ: Σπάτα ΤΗΛ. 2106685715 – 2106685600**

**www.spoudi.gr, e-mail: info@ spoudi.gr**
**/spoudibyronas@gmail.com/spoudipeiraias@otenet.gr**