

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 19 ΜΑΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελ. 28 σχολικό βιβλίο

A2. Σελ. 87 σχολικό βιβλίο

A3. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός υπαλλήλων v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i \cdot v_i$
0	5	5	25	0
1	4	9	20	4
2	2	11	10	4
3	4	15	20	12
4	5	20	25	20
Σύνολα	$v = 20$		100	40

Ο παραπάνω πίνακας προέκυψε σύμφωνα με τις παρακάτω πράξεις:

• $v_5 = v_1 = 5$

• $v = 20$

• $N_2 = v_1 + v_2 \Leftrightarrow 9 = 5 + v_2 \Leftrightarrow v_2 = 4$

- $f_3 \% = \frac{v_3}{v} \cdot 100 \Leftrightarrow 10 = \frac{v_3}{50} \cdot 100 \Leftrightarrow v_3 = 2$
- $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow 5 + 4 + 2 + v_4 + 5 = 20 \Leftrightarrow v_4 = 4$
- $N_1 = v_1 = 5$ • $N_3 = N_2 + v_3 = 11$
- $N_4 = N_3 + v_4 = 15$ • $N_5 = v = 20$
- $f_1 \% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{5}{20} \cdot 100 = 25$
- $f_2 \% = \frac{v_2}{v} \cdot 100 = \frac{4}{20} \cdot 100 = 20$
- $f_4 \% = \frac{v_4}{v} \cdot 100 = 20$
- $f_5 \% = \frac{v_5}{v} \cdot 100 = \frac{5}{20} \cdot 100 = 25$
- $x_1 v_1 = 0$ • $x_2 v_2 = 4$ • $x_3 v_3 = 4$
- $x_4 v_4 = 12$ • $x_5 v_5 = 20$

B2. Έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{40}{20} = 2$$

B3. Οι υπάλληλοι που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες είναι:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = N_4 = 15$$

B4. Το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες

$$f_3 \% + f_4 \% + f_5 \% = 55\%$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \right)' = \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' + \left(\frac{1}{2} \right)' = \\ &= \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} + 0 = \\ &= \frac{x^2+1 - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

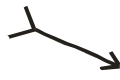

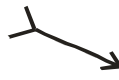
Γ2. Ο ρυθμός μεταβολής της f για $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$ είναι αντίστοιχα:

$$f'(-1) = \frac{1-(-1)^2}{[(-1)^2+1]^2} = 0 \text{ και } f'(1) = \frac{1-1^2}{(1^2+1)^2} = 0$$

Γ3. Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο και οι ρίζες της f' καθώς και η μονοτονία και τα ακρότατα της f

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	○	+	○	-
$f(x)$					
		T.E. $f(-1) = 0$	T.M. $f(1) = 1$		

Γ4. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ επομένως ισχύει ισοδυναμία
 $2015 < 2016 \Leftrightarrow f(2015) > f(2016)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x \neq 4$ έχουμε:

$$\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \frac{(x-2)(x-4)}{x-4} = x - 2$$

Οπότε:

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x - 2) = 2$$

Δ2. Για $\alpha = 2$ έχουμε:

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 \text{ και}$$

$$f'(x) = (x^2 + 2x - 3)' = 2x + 2$$

Δ3. Είναι:

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$$

$$f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 2 = -2$$

Α' τρόπος

Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y = f'(-2)x + \beta \text{ ή } y = -2x + \beta$$

και επειδή διέρχεται από το σημείο $M(-2, f(-2)) \equiv M(-2, -3)$, έχουμε:

$$-3 = -2 \cdot (-2) + \beta \Leftrightarrow -3 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -7$$

Άρα $y = -2x - 7$

Β' τρόπος

Έχουμε:

$$y - f(-2) = f'(-2)[x - (-2)] \Leftrightarrow$$

$$y - (-3) = -2(x + 2) \Leftrightarrow$$

$$y + 3 = -2x - 4 \Leftrightarrow$$

$$y = -2x - 7$$

Δ4. Τα σημεία $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$, $A_5(x_5, y_5)$ είναι σημεία της $y = -2x - 7$, άρα:

$$y_1 = -2x_1 - 7, y_2 = -2x_2 - 7, y_3 = -2x_3 - 7, y_4 = -2x_4 - 7, y_5 = -2x_5 - 7$$

Από την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου σελίδα 99 προκύπτει:

$$\bar{y} = -2\bar{x} - 7 = -2 \cdot 2 - 7 = -11$$

Κλάδος Μαθηματικών
Σκύφας Αθανάσιος
Γιαννάκος Παναγιώτης
Ανδριώτης Δημήτρης
Σαρρή Ελένη
Τάσης Πέτρος
Σκύφα Άρτεμις
Αναστασίου Στάθης
Αμαξόπουλος Πάρης
Σκύφα Αμαρυλλίς

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΣΠΟΥΔΗ

- ΑΘΗΝΑ: ΣΟΛΩΝΟΣ 101 ΤΗΛ. 2103828854 – 2103845239
- ΠΑΓΚΡΑΤΙ: ΑΓ. ΦΑΝΟΥΡΙΟΥ 30 ΤΗΛ. 2107520883 – 2107519429
- ΒΥΡΩΝΑΣ: ΝΙΚΗΦΟΡΙΔΗ 10 ΤΗΛ. 2107669192 – 2107666233
- ΠΕΙΡΑΙΑΣ: ΗΡ.ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ 30 ΤΗΛ. 2104190171 – 2107519429

www.spoudi.gr, e-mail: info@spoudi.gr /spoudipagkrati@gmail.com
/ spoudibyronas@gmail.com / spoudipeiraias@otenet.gr