ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΣΠΟΥΔΗ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 99

Α2. **α.** **Ψ**

β. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 35

Α3. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 216

Α4. **α) Λ** **β) Λ** **γ) Σ** **δ) Σ** **ε) Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι:

$$f'(x)=\left(x-\frac{4}{x^2}\right)'=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3},\ x\neq 0$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\nearrow$	

Τ.Μ.

Άρα: $f \uparrow (-\infty,-2]$, $f \downarrow [-2,0)$, $f \uparrow [0,+\infty)$

$y_{TM} = f(-2) = -3$

B2. Είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)' = -\frac{24}{x^4},\ x \neq 0$$

x	$-\infty$ **0** $+\infty$	
$f''(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$\frown$	$\frown$

Άρα: $f \frown (-\infty,0)$, $f \frown (0,+\infty)$

Η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

B3. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f.

α) Στο $+\infty$

Είναι: $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{4}{x^3}$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, άρα $\lambda = 1$

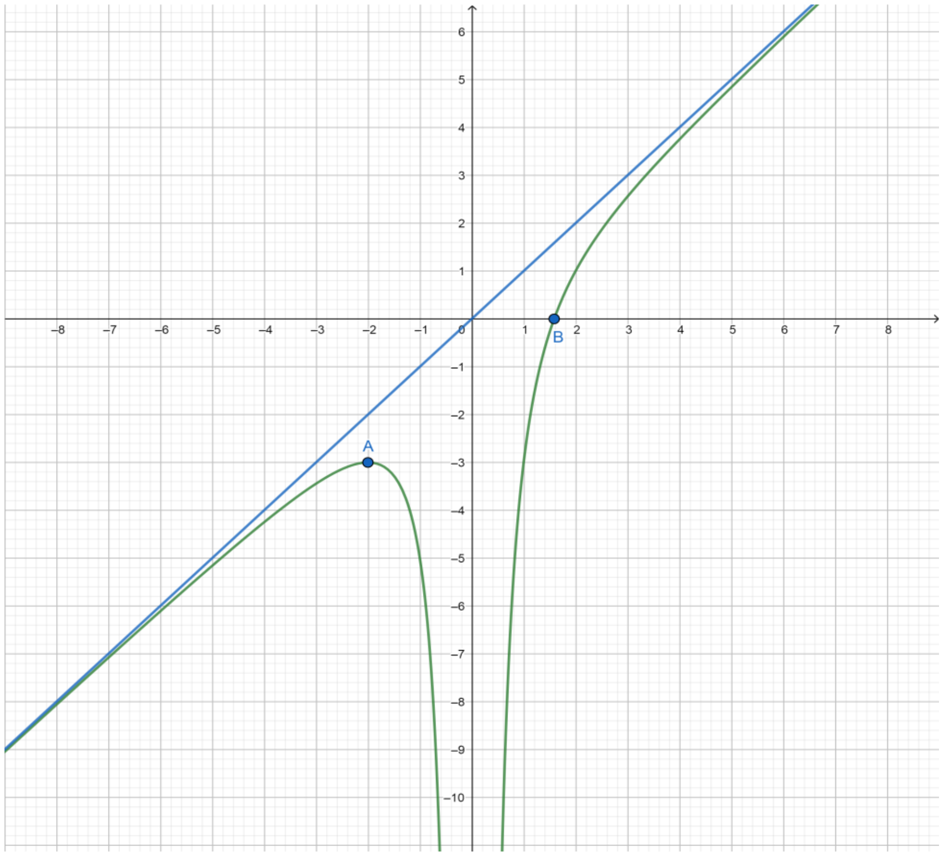
$$f(x) - \lambda x = -\frac{4}{x^3},\ \text{οπότε}\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right) = 0,\ \text{άρα}\ \beta = 0$$

Άρα η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

β) Στο $-\infty$

Όμοια προκύπτει ότι η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$

B4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πλευρά του τετραγώνου είναι $\frac{x}{4}$ m και η ακτίνα του κύκλου από τον τύπο $L = 2\pi\rho$ είναι $\rho = \frac{8-x}{2\pi}$ m

Το ζητούμενο άθροισμα Ε(x) των εμβαδών είναι:

$$E(x) = E_{\tau\varepsilon\tau\rho}(x) + E_{\kappa}(x) = \frac{x^2}{16} + \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 =$$

$$=\frac{x^2\pi+4x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},\ x\in(0,8)$$

Γ2. Είναι: $E'(x)=\frac{1}{16\pi}\left(2(\pi+4)x-64\right)=\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}\ ,x\in(0,8)$

x	**0**	$\frac{32}{\pi+4}$	**8**
$E'(x)$	$-$	0	$+$
$E(x)$	↘		↗

Ο.Ε.

$$y_{OE}=E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{16}{\pi+4}$$

Η πλευρά του τετραγώνου για $x=\frac{32}{\pi+4}$ είναι ίση με: $\frac{x}{4}=\frac{8}{\pi+4}$

Η διάμετρος του κύκλου για $x=\frac{32}{\pi+4}$ είναι ίση με:

$$2\cdot\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{2\pi}=\frac{8\pi+32-32}{\pi(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}$$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μια ακριβή ρίζα στο (0,8).

Επειδή η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ είναι:

$$E(A_1)=E\left(\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]\right)\overset{E\downarrow}{=}\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to0^+}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

Επειδή η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)$ είναι:

$$E(A_2)=E\left(\left[\frac{32}{\pi+4},8\right)\right)\overset{E\uparrow}{=}\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$$

παρατηρούμε ότι το $5\in E(A_1)$ και $5\notin E(A_2)$

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in A_1$ με $E(x_1)=5$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι:

$$f'(x)=\left(2e^{x-\alpha}-x^2\right)'=2e^{x-\alpha}-2x$$

$$f''(x)=\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)'=2e^{x-\alpha}-2=2\left(e^{x-\alpha}-1\right)$$

οπότε:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}-1=0\Leftrightarrow x=\alpha$$
$$f''(x)>0\Leftrightarrow e^{x-\alpha}-1>0\Leftrightarrow x>\alpha$$
$$f''(x)<0\Leftrightarrow x<\alpha$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$
		Σ.Κ.	

Άρα: $f\ \cap\ (-\infty,\alpha]$, $f\ \cup\ [\alpha,+\infty)$

$y_{\Sigma K}=f(\alpha)=2-\alpha^2$

Δ2. Ζητάμε να αποδείξουμε ότι η f' έχει δύο ακριβώς ρίζες εκατέρωθεν των οποίων η f' αλλάζει πρόσημο.
Σύμφωνα με τον πίνακα προσήμων της f'' , είναι:

f' γνησίως φθίνουσα $(-\infty,\alpha]$ και f' γνησίως αύξουσα $[\alpha,+\infty)$

Αν $A_1=(-\infty,\alpha]$ και $A_2=[\alpha,+\infty)$, τότε είναι:

$$f'(A_1)=\left[f'(\alpha),\lim_{x\to-\infty}f'(x)\right)$$
$$f'(A_2)=\left[f'(\alpha),\lim_{x\to+\infty}f'(x)\right)$$

Είναι:

$$f'(\alpha)=2-2\alpha=2(1-\alpha)<0$$
$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(2e^{-\alpha}-2\frac{x}{e^x}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

οπότε $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

Άρα: $f'(A_1)=\left[2(1-\alpha),+\infty\right)$ και $f'(A_2)=\left[2(1-\alpha),+\infty\right)$

Επειδή $0\in f'(A_1)$ η f' έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_1 και επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 η ρίζα είναι μοναδική.

Επειδή $0\in f'(A_2)$ η f' έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_2 και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 η ρίζα είναι μοναδική.

Είναι: $x<x_1\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_1)\Leftrightarrow f'(x)>0$

$x>x_1\overset{f'\downarrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_1)\Leftrightarrow f'(x)<0$

Άρα η f παρουσιάζει στο x_1 τοπικό μέγιστο.

Είναι: $x<x_2\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_2)\Leftrightarrow f'(x)<0$

$x>x_2\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_2)\Leftrightarrow f'(x)>0$

Άρα η f παρουσιάζει στο x_2 τοπικό ελάχιστο.

Δ3. Είναι: $f(x)=f(1)$

Έστω ότι η εξίσωση έχει ρίζα $x_0 \in (\alpha, x_2)$, τότε θα ισχύει $f(x_0)=f(1)$. Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[1, x_0]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_0)$ τέτοιο ώστε να είναι $f'(\xi)=0$ άτοπο, διότι η f' μηδενίζεται μόνο στα x_1, x_2 .

Δ4. Η f είναι κυρτή στο $[2,3]$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=2$ είναι:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=-2x+2$$

Επομένως ισχύει $f(x) \geq -2x+2$ για κάθε $x \in [2,3]$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=2$, οπότε $\sqrt{x-2}f(x) \geq \sqrt{x-2}(-2x+2)$

Άρα:

$$\int_2^3 \sqrt{x-2}f(x)dx > \int_2^3 \sqrt{x-2}(-2x+2)dx \qquad (1)$$

θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I=\int_2^3 \sqrt{x-2}(-2x+2)dx$

Θέτουμε $u=x-2$, οπότε $du=dx$

Αν $x=2$, τότε είναι $u=0$

Αν $x=3$, τότε είναι $u=1$

Άρα:

$$I=\int_0^1 \sqrt{u}(-2u-2)du=\int_0^1\left(-2u\sqrt{u}-2\sqrt{u}\right)du=$$

$$=-2\int_0^1\left(\left(\sqrt{u}\right)^3+\sqrt{u}\right)du=-2\int_0^1\left(\sqrt{u}\right)^3 du-2\int_0^1\sqrt{u}\,du=$$

$$=-2\left[\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]_0^1-2\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=-2\cdot\frac{2}{5}-2\cdot\frac{2}{3}=-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{32}{15}$$

Κλάδος Μαθηματικών
Σκύφας Αθανάσιος
Γιαννάκος Παναγιώτης
Ανδριώτης Δημήτρης
Σαρρή Ελένη
Σκύφα Άρτεμις
Αμαξόπουλος Πάρης
Σκύφα Αμαρυλλίς
Σαντοριναίος Αντώνης
Γρίβα Λία