ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΣΠΟΥΔΗ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 135

Α2. α. ψ

β. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Ως παράδειγμα αναφέρουμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=|x|$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Α3. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 73

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{x\neq 1 \text{ και } \frac{x}{1-x}>0\right\}=\{x\neq 1 \text{ και } x(1-x)>0\}$$

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
x	$-$ 0 $+$		$+$
$1-x$	$+$ $+$	0	$-$
$x(1-x)$	$-$ 0 $+$	0	$-$

Άρα $D_{fog}=(0,1)$ και $(fog)(x)=f(g(x))=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

B2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$h'(x)=\left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)'=(\ln x-\ln(1-x))'=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0 \text{ για κάθε } x\in(0,1)$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1) οπότε είναι και 1 - 1 επομένως η h αντιστρέφεται.

Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1) έχουμε ότι

$$h((0,1))=\left(\lim_{x\to0^+}h(x),\lim_{x\to1^-}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Άρα: $h^{-1}:\mathbb{R}\to(0,1)$

Για τον τύπο της h έχουμε :

$$y=h(x)\Leftrightarrow y=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^y=\frac{x}{1-x}\Leftrightarrow e^y=x(1+e^y)\overset{1+e^y>0}{\Leftrightarrow}x=\frac{e^y}{1+e^y}$$

Άρα $f^{-1}(y)=\frac{e^y}{1+e^y}$ επομένως $f^{-1}(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$,

B3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\varphi'(x)=\frac{e^x\cdot(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}\Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x)=\frac{e^x\cdot\left(e^x+1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}\Leftrightarrow\varphi'(x)=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

Επειδή $\varphi'(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η φ δεν παρουσιάζει ακρότατα.

$$\varphi''(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)^2-e^x\cdot2\cdot\left(e^x+1\right)\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^4}\Leftrightarrow$$

$$\varphi''(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-2e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^3}\Leftrightarrow$$

$$\varphi''(x)=\frac{e^x\left(e^x+1-2e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}\Leftrightarrow$$

$$\varphi''(x)=\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$$

$$\varphi''(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}=0\Leftrightarrow1-e^x=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$$

$$\varphi''(x)<0\Leftrightarrow1-e^x<0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$$

$$\varphi''(x)>0\Leftrightarrow1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<1\Leftrightarrow x<0$$

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$\cup$		$\cap$

Σ.Κ

Η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$

Η φ είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$

Η φ παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0 = 0$ το $\varphi(0) = \frac{1}{2}$

Β4. Είναι: $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$

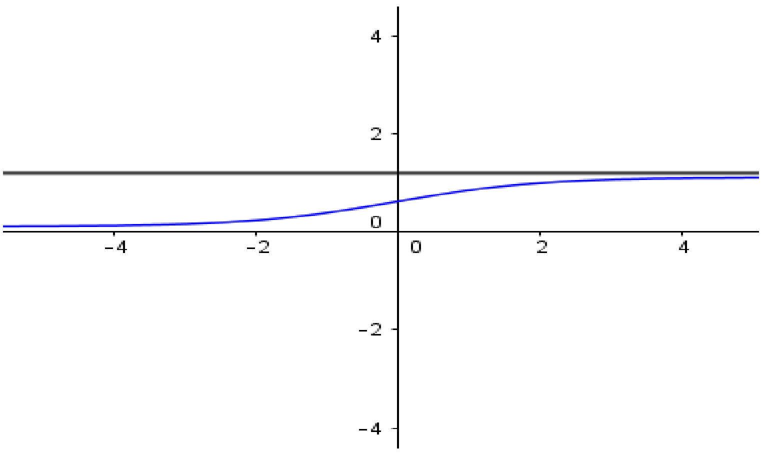
Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$

Είναι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x + 1)'} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

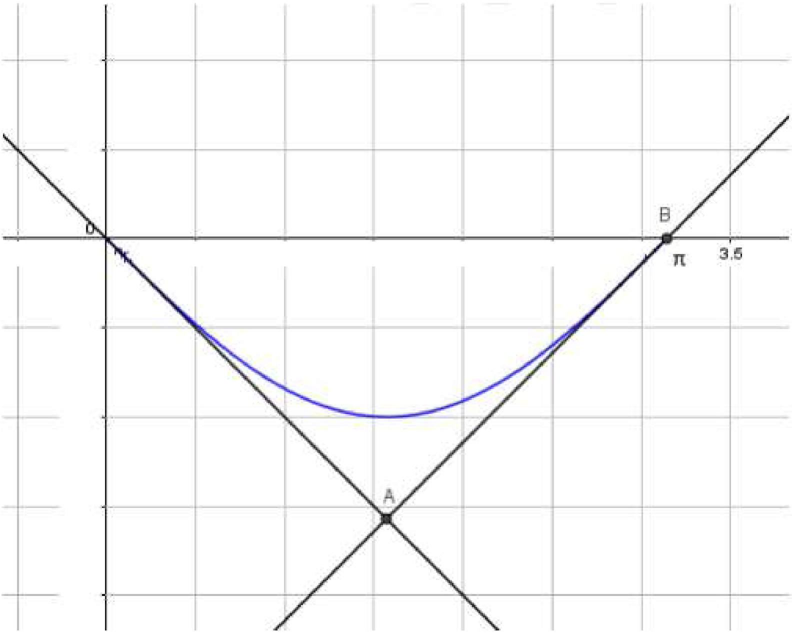
Άρα η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$
$\varphi(x)$	↗ ∪	Σ.Κ	↗ ∩



ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(x_0, f(x_0))$ είναι

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0(x - x_0)$$

Επειδή το σημείο $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ ανήκει στην εφαπτομένη (ε) ισχύει

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 + \sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) = 0$$

Θέτουμε $g(x) = -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\ x \in [0, \pi]$

Παρατηρούμε ότι $g(0) = 0$ και $g(\pi) = 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0,π) με παράγωγο:

$$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = -\eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0$ ή $x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pi$ ή $x = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

O.E

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+1<0$$

Είναι: $0<x\le\frac{\pi}{2}$, οπότε $g(x)<g(0)\Leftrightarrow g(x)<0$

$\frac{\pi}{2}<x<\pi$, οπότε $g(x)<g(\pi)\Leftrightarrow g(x)<0$

Άρα η $x=0$ και $x=\pi$ είναι οι μοναδικές ρίζες της g και οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι $(\varepsilon_1): y=-x$ και $(\varepsilon_2): y=x-\pi$

Γ2. Είναι: $E_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|-\eta\mu x+x\right|\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|-\eta\mu x-x+\pi\right|\,dx$

Έχουμε $-\eta\mu x+x\ge 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $-\eta\mu x-x+\pi\ge 0$ για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ οπότε:

$$E_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\eta\mu x+x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\eta\mu x-x+\pi)\,dx=$$

$$=\left[\sigma\upsilon\nu x+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\sigma\upsilon\nu x+\frac{x^2}{2}+\pi x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)+\left(-1-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-2$$

Επειδή $-\eta\mu x\le 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$, έχουμε:

$$E_2=\int_0^{\pi}\left|-\eta\mu x\right|\,dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x\,dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=1+1=2$$

Επομένως: $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$

Γ3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\eta\mu x+x}{-\eta\mu x-x+\pi}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x-x+\pi)=0$ και $-\eta\mu x-x+\pi>0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}=+\infty$. Επίσης $\lim\limits_{x\to\pi}(-\eta\mu x+x)=\pi>0$

Άρα: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-\eta\mu x+x}{-\eta\mu x-x+\pi}=+\infty$

Γ4. Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $y=x-\pi$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής $x_0=\pi$. Άρα $f(x)\geq x-\pi$ για κάθε $x\in[1,e]\subseteq[0,\pi]$, οπότε:

$$\frac{f(x)}{x}\geq 1-\frac{\pi}{x},\ \text{για κάθε } x\in[1,e]$$

Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\pi$ έχουμε:

$$\int_1^e\frac{f(x)}{x}\,dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx=[x-\pi<\ln x]_1^e=e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,\pi)$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Μελέτη της συνεχής στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^4}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x\eta\mu x)=0$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

Επίσης $f(0)=e^0\eta\mu 0=0$ άρα ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής στο $x=0$

Ισχύουν $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)$ και $\lim\limits_{x\to\pi^-}f(x)=f(\pi)$, άρα η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$

Είναι: $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}, & x\in[-1,0)\\ e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x), & x\in(0,\pi]\end{cases}$

Μελέτη παράγωγου στο $x_0=0$

Για $x>0$ είναι:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{e^x ημx}{x}=e^x\frac{ημx}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

Για $x<0$ είναι:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\sqrt[3]{\frac{x^4}{(-x)^3}}=\sqrt[3]{-x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Για κάθε $x\in(0,\pi]$ είναι $f'(x)=e^x(ημx+συνx)$, οπότε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow$$

$$e^x(ημx+συνx)=0\Leftrightarrow$$

$$ημx+συνx=0\Leftrightarrow ημx=-συνx\overset{*}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{ημx}{συνx}=-1\Leftrightarrow εφx=-1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}$$

Επομένως $x=0$ και $x=\frac{3\pi}{4}$ είναι τα κρίσιμα σημεία της f.

Δ2. Το πρόσημο της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}$	$-$	$-$	$-$	
$e^x(ημx+συνx)$	$+$	$+$	$-$	
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

T.M. T.E T.M. T.E.

άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\left[-1,0\right]$, f γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ και f γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$

Η f παρουσιάζει στο $x_1=-1$ τοπικό μέγιστο το $f(-1)=1$, στο $x_2=0$ τοπικό ελάχιστο το $f(0)=0$, στο $x_3=\frac{3\pi}{4}$ τοπικό μέγιστο το $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}$ και στο $x_4=\pi$ τοπικό ελάχιστο το $f(\pi)=0$

Στο $A_1=\left[-1,0\right]$ η f είναι συνεχής και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 , οπότε $f(A_1)=\left[f(0),f(-1)\right]=\left[0,1\right]$

Στο $A_3=\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ η f είναι συνεχής και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_3 , οπότε $f(A_3)=\left[f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

Στο $A_2=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ και η f είναι συνεχής και η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 , οπότε $f(A_2)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

Άρα $f(\left[-1,\pi\right])=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

Δ3. Είναι $E=\int_0^{\pi}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\eta\mu x-e^{5x}\right|\,dx$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$-1\le \eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow$$
$$-e^x\le e^x\eta\mu x\le e^x \Leftrightarrow$$
$$-e^x-e^{5x}\le e^x\eta\mu x-e^{5x}\le e^x-e^{5x}$$

Για $0\le x\le\pi$ έχουμε $x\le 5x\Leftrightarrow e^x\le e^{5x}\Leftrightarrow e^x-e^{5x}\le 0$

Άρα $e^x\eta\mu x-e^{5x}\le e^x-e^{5x}\le 0$, για κάθε $x\in\left[0,\pi\right]$

Άρα $E=-\int_0^{\pi}\left(e^x\eta\mu x-e^{5x}\right)\,dx=-\int_0^{\pi}\left(e^x\eta\mu x\right)\,dx+\int_0^{\pi}e^{5x}dx$

Υπολογισμός ολοκληρώματος $I=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx$

$$I=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\eta\mu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=$$

$$=\left(e^{\pi}\eta\mu\pi-0\right)-\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu x dx=-\left(\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x\left(\eta\mu x\right)dx\right)=$$

$$=-\left(e^{\pi}\sigma\upsilon\nu\pi-\sigma\upsilon\nu 0\right)-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=-\left(-e^{\pi}-1\right)-I=e^{\pi}+1-I$$

Άρα: $I=e^{\pi}+1-I\Leftrightarrow 2I=e^{\pi}+1\Leftrightarrow I=\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

Άρα:

$$E=-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx+\int_0^{\pi}e^{5x}dx=-\frac{e^{\pi}+1}{2}+\frac{e^{5\pi}-1}{5}=$$

$$=\frac{-5e^{\pi}-5+2e^{5\pi}-2}{10}=\frac{2e^{5\pi}-5e^{\pi}-7}{10}$$

Δ4. Είναι:

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$16f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$$

$$16f(x)-8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}=(4x-3\pi)^2 \qquad (1)$$

Επειδή η f παρουσιάζει στο $x_0=\dfrac{3\pi}{4}$ ολικό μέγιστο το $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ για κάθε $x\in[-1,\pi]$ ισχύει:

$$f(x)\le f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\ f(x)\le e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$16f(x)\le 8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\ \Leftrightarrow\ 16f(x)-8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\le 0$$

Το ίσο ισχύει μόνο για $x_0=\dfrac{3\pi}{4}$

Επίσης $(4x-3\pi)^2\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως για να ισχύει η σχέση (1) πρέπει:

$16f(x)-8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}=0$ και $(4x-3\pi)^2=0$, οπότε:

$$x=\frac{3\pi}{4}\quad \text{και}\quad 4x-3\pi=0\Leftrightarrow$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \text{ και } x = \frac{3\pi}{4}$$

άρα $x = \frac{3\pi}{4}$ είναι η λύση της εξίσωσης.

Κλάδος Μαθηματικών
Σκύφας Αθανάσιος
Γιαννάκος Παναγιώτης
Ανδριώτης Δημήτρης
Σαρρή Ελένη
Τάτσης Πέτρος
Σκύφα Άρτεμις
Αμαξόπουλος Πάρης
Σκύφα Αμαρυλλίς