ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΣΠΟΥΔΗ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 262

Α2. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 141

Α3. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 246-247

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-x^2\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x^3+2x-2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		Ο.Ε.	

με $f(0)=0$

B2.

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)^2-2x\cdot 2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^4}\Leftrightarrow$$

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)^2-8x^2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}\Leftrightarrow f''(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)-8x^2}{\left(x^2+1\right)^3}\Leftrightarrow$$

$$f''(x)=\frac{-6x^2+2}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -6x^2+2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	○	$+$	○	$-$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$		$\cap$	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

B3.

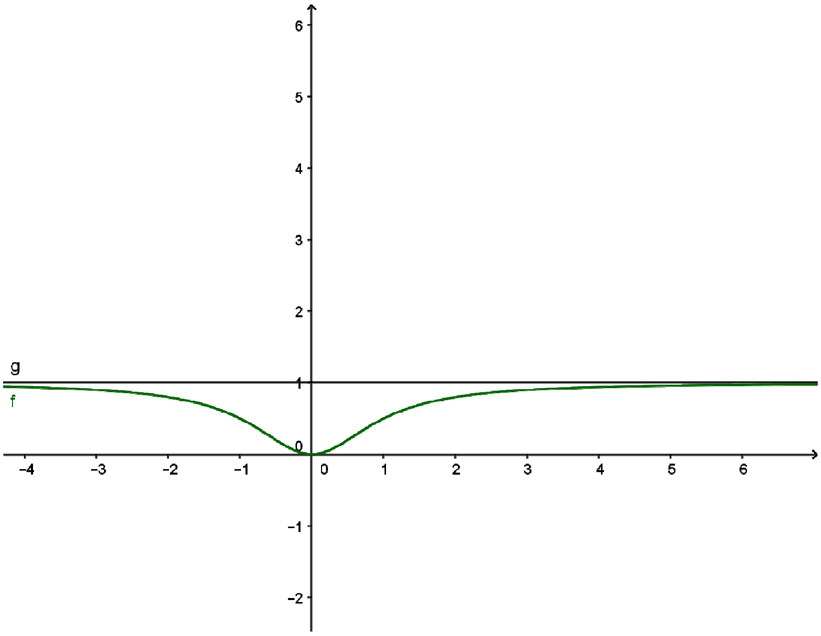
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=0=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}-0x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\beta$$

Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Όμοια στο $-\infty$ βρίσκουμε την ίδια ευθεία

B4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θέτουμε $h(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι $h(0)=e^0-0-1=1-1=0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι:

$$h'(x)=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2}-1\right)=0\Leftrightarrow 2x=0 \text{ ή } e^{x^2}-1=0\Leftrightarrow$$

$$x=0 \text{ ή } e^{x^2}=1\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } e^{x^2}=e^0\Leftrightarrow x=0$$

- Για $x>0$ έχουμε $2x>0$ και e^x αύξουσα άρα:

  $$e^{x^2}>e^0=1\Leftrightarrow e^{x^2}-1>0$$

  Επομένως $h'(x)>0$

- Για $x<0$ έχουμε $2x<0$ και e^x αύξουσα άρα:

  $$e^{x^2}>e^0=1\Leftrightarrow e^{x^2}-1>0$$

  Επομένως $h'(x)<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

O.E

Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 το $y_{OE}=h(0)=0$

Άρα είναι:

- $x<0 \overset{h\downarrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(0)\Leftrightarrow h(x)>0$
- $x>0 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(0)\Leftrightarrow h(x)>0$

Άρα το 0 είναι μοναδική ρίζα της συνάρτησης h, οπότε το 0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$, δηλαδή το 0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $e^{x^2}-x^2-1=0$

Γ2. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$|f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right| \Leftrightarrow |f(x)|=|h(x)|$$

Γνωρίζουμε ότι $h(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα:

$$|f(x)|=h(x) \qquad (1)$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$
- $f(x)=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} h(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ τότε η σχέση (1) γίνεται:

$$f(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$$

Αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ τότε η σχέση (1) γίνεται:

$$f(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$$

Άρα:

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1\,,\ x\neq 0 \text{ και } f(0)=0$$

άρα:

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1\,,\ x\in\mathbb{R}$$

β) Αν $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ τότε η σχέση (1) γίνεται:

$$-f(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=-h(x)\Leftrightarrow f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$$

Αν $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ τότε η σχέση (1) γίνεται:

$$-f(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=-h(x)\Leftrightarrow f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$$

άρα:

$$f(x)=-e^{x^2}+x^2+1\,,\ x\neq 0$$

και αφού $f(0)=0$ τελικά έχουμε ότι:

$$f(x)=-e^{x^2}+x^2+1\,,\ x\in\mathbb{R}$$

γ) Αν $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ τότε:

$$f(x)=\begin{cases}-e^{x^2}+x^2+1\,, x<0\\ e^{x^2}-x^2-1\,,\ x>0\end{cases}$$

και αφού $f(0)=0$ τελικά έχουμε ότι:

$$f(x)=\begin{cases}-e^{x^2}+x^2+1\,, x\leq 0\\ e^{x^2}-x^2-1\,,\ x>0\end{cases}$$

δ) Αν $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$ τότε:

$$f(x)=\begin{cases}-e^{x^2}+x^2+1\,, x>0\\ e^{x^2}-x^2-1\,,\ x<0\end{cases}$$

και αφού $f(0)=0$ τελικά έχουμε ότι:

$$f(x)=\begin{cases}-e^{x^2}+x^2+1\,, x\geq 0\\ e^{x^2}-x^2-1\,,\ x<0\end{cases}$$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x)=2xe^{x^2}-2x$$

$$f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2 \text{ με } f''(0)=0$$

$$f'''(x)=4xe^{x^2}+8xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}=12xe^{x^2}+8x^3e^{x^2}=4xe^{x^2}\left(3+2x^2\right)$$

$$f'''(x)=0\Leftrightarrow 4xe^{x^2}\left(3+2x^2\right)=0\Leftrightarrow 4x=0\Leftrightarrow x=0$$

Επειδή $3+2x^2>0$ και $4e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το πρόσημο της f''' εξαρτάται από το πρόσημο του x
Άρα αν $x<0$ τότε $f'''(x)<0$ και αν $x>0$ τότε $f'''(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'''(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	↘		↗

- Για $x<0 \Leftrightarrow f''(x)>f''(0) \Leftrightarrow f''(x)>0$
- Για $x>0 \Leftrightarrow f''(x)>f''(0) \Leftrightarrow f''(x)>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cup$

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

Γ4. Έστω η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x)=f(x+3)-f(x)\ ,\ x\in[0,+\infty)$$

$$g'(x)=f'(x+3)-f'(x)$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
Για $x\in[0,+\infty)$ ισχύει ότι $x+3>x$ οπότε:

$$f'(x+3)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0 \Leftrightarrow g'(x)>0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$ άρα η συνάρτηση g είναι 1-1 στο $[0,+\infty)$, οπότε:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x) \Leftrightarrow$$

$$g(|\eta\mu x|)=g(x) \Leftrightarrow |\eta\mu x|=x \Leftrightarrow x=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε:

$$\int_0^{\pi} f''(x)\cdot ημx dx = \left[f'(x)ημx\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\cdot συνx dx = f'(\pi)\cdot ημ\pi - f'(0)\cdot ημ0 - \int_0^{\pi} f'(x)συνx dx =$$

$$= -\left[f(x)συνx\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)(συνx)' dx = -f(\pi)συν\pi + f(0)συν0 - \int_0^{\pi} f(x)ημx dx =$$

$$= f(\pi) + f(0) - \int_0^{\pi} f(x)ημx dx =$$

Επομένως η δοσμένη ισότητα γίνεται:

$$\int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx dx + \int_0^{\pi} f''(x)\cdot ημx dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx dx + f(\pi) + f(0) - \int_0^{\pi} f(x)\cdot ημx dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$f(\pi) + f(0) = \pi \quad (1)$$

Θέτουμε $g(x) = \dfrac{f(x)}{ημx}, x \in \mathbb{R} - \{κ\pi, κ \in \mathbb{Z}\}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ και $f(x) = g(x)\cdot ημx$

οπότε:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to o}\left(g(x)\cdot ημx\right) = 1\cdot 0 = 0$$

Επομένως $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, αφού η f είναι συνεχής.

Από τη σχέση (1) προκύπτει $f(\pi) = \pi$ που είναι το ζητούμενο.

Επίσης από τον ορισμό της παραγώγου είναι:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$$

και από το δοσμένο όριο έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{ημx} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{ημx}{x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(0)}{1} = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 1$$

Δ2. α) Παραγωγίζουμε τα μέλη της δοσμένης σχέσης $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ και προκύπτει:

$$e^{f(x)}f'(x) + 1 = f'(f(x))\cdot f'(x) + e^x \qquad (2)$$

Έστω ότι f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f, οπότε από το θεώρημα Fermat ισχύει:

$$f'(x_0) = 0$$

Η σχέση (2) για $x = x_0$ γίνεται:

$$e^{f(x_0)}f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0))\cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow 0 + 1 = f'(0)\cdot 0 + e^{x_0} \Leftrightarrow 1 = e^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Άτοπο, αφού $f'(0) = 1$

β) Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ διότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, επομένως η f'

διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f'(0)=1>0$ έχουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ3. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Επομένως $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Είναι:

$$\left|\frac{ημx+συνx}{f(x)}\right|=\frac{|ημx+συνx|}{|f(x)|}\le\frac{|ημx|+|συνx|}{|f(x)|}\le\frac{2}{|f(x)|}$$

οπότε:

$$-\frac{2}{|f(x)|}\le\frac{ημx+συνx}{f(x)}\le\frac{2}{|f(x)|}$$

Επειδή:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{|f(x)|}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{|f(x)|}=0$$

από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{ημx+συνx}{f(x)}=0$

Δ4. Θέτουμε στο ολοκλήρωμα $\int_1^{e^π}\frac{f(\ln x)}{x}dx$, $u=\ln x$, οπότε $du=\frac{1}{x}dx$ και

- για $x=1$, είναι $u=\ln 1=0$
- για $x=e^π$, είναι $u=\ln e^π=π$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται $\int_0^π f(x)dx$ και η προς απόδειξη ανίσωση είναι:

$$0<\int_0^π f(x)dx<π^2$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως:

$$0\le x\le π \Leftrightarrow f(0)\le f(x)\le f(π)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le π$$

Έχουμε:

$$f(x)\ge 0,\ \text{άρα}\ \int_0^π f(x)dx\ge 0$$

και επειδή η f μηδενίζει μόνο για $x=0$, είναι:

$$\int_0^π f(x)dx>0,\quad (3)$$

Επίσης:

$$f(x)\le π\Leftrightarrow f(x)-π\le 0,\ \text{άρα}\ \int_0^π (f(x)-π)dx\le 0$$

και επειδή $f(x)-π=0\Leftrightarrow f(x)=π$ μόνο για $x=π$, είναι:

$$\int_0^π(f(x)-π)dx<0\Leftrightarrow\int_0^π f(x)dx-\int_0^π πdx<0\Leftrightarrow\int_0^π f(x)dx-π^2<0\Leftrightarrow\int_0^π f(x)dx<π^2\quad(4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει το ζητούμενο.

Κλάδος Μαθηματικών

Σκύφας Αθανάσιος
Γιαννάκος Παναγιώτης
Ανδριώτης Δημήτρης
Σαρρή Ελένη
Τάτσης Πέτρος
Σκύφα Άρτεμις
Αναστασίου Στάθης
Αμαξόπουλος Πάρης
Σκύφα Αμαρυλλίς